

**| Grade:10| Mathematics Olympiad 奧數 奥数|**

**Max Marks: 200**

**滿分: 200**

**满分: 200**

**Time Allotted: 60 Mins**

**時限: 60 分鐘**

**时限: 60 分钟**

**Instructions:**

- Question number 1 to 20 are of short answer type.

第 1 至 20 題為簡答題。

第 1 至 20 题为简答题。

- Each question carries 10 Marks.

每題 10 分。

每题 10 分。

1.

Let the  $p$ th,  $q$ th and  $r$ th terms of an A.P are  $a$ ,  $b$  and  $c$  be respectively, then calculate  $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q)$ .

一個等差數列的第  $p$ 、 $q$ 、 $r$  項分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，計算  $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q)$ 。

一个等差数列的第  $p$ 、 $q$ 、 $r$  项分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，计算  $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q)$ 。

2.

If one of the roots of the equation  $x^2 + ax + 3 = 0$  is 3 and one of the roots of the equation  $x^2 + ax + b = 0$  is three times the other root, then what is the value of  $b$ ?

若方程式  $x^2 + ax + 3 = 0$  的一個根為 3，且方程式  $x^2 + ax + b = 0$  的一個根是另一個根的三倍，求  $b$  的值。

若方程式  $x^2 + ax + 3 = 0$  的一个根为 3，且方程式  $x^2 + ax + b = 0$  的一个根是另一个根的三倍，求  $b$  的值。

3.

Bag  $P$  contains 2 black and 3 red pens, while bag  $Q$  contains 3 black and 4 red pens. Out of these two bags one is selected at random; and the probability of choosing bag  $P$  is double that of bag  $Q$ . If a red pen is drawn from the selected bag, then find the probability that it has come from bag  $Q$ .

袋子  $P$  中有 2 支黑色和 3 支紅色筆，袋子  $Q$  中有 3 支黑色和 4 支紅色筆。從這兩個袋子中隨機選擇一個，選擇袋子  $P$  的概率是選擇袋子  $Q$  的兩倍。如果從選中的袋子中抽出一支紅色筆，求這支紅筆來自袋子  $Q$  的概率。

袋子  $P$  中有 2 支黑色和 3 支紅色筆，袋子  $Q$  中有 3 支黑色和 4 支紅色筆。從這兩個袋子中隨機選擇一個，選擇袋子  $P$  的概率是選擇袋子  $Q$  的兩倍。如果從選中的袋子中抽出一支紅色筆，求這支紅筆來自袋子  $Q$  的概率。

4.

What is the sum of all two-digit numbers which leave remainder 7 when they are divided by 9 ?

求所有除以 9 後餘數為 7 的兩位數字之和。

求所有除以 9 后余数为 7 的两位数字之和。

5.

Find the smallest positive value of  $x$  satisfying the equation  $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$ .

找出滿足方程式  $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$  的最小正數  $x$ 。

找出滿足方程式  $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$  的最小正数  $x$ 。

6.

If the roots of the equation  $(c^2 - ab)x^2 - 2(a^2 - bc)x + (b^2 - ac) = 0$  for  $a \neq 0$  are real and equal, then the value of  $a^3 + b^3 + c^3$  is :

如果方程式  $(c^2 - ab)x^2 - 2(a^2 - bc)x + (b^2 - ac) = 0$  在  $a \neq 0$  的情況下有實數且相等的根，則  $a^3 + b^3 + c^3$  的值為：

如果方程式  $(c^2 - ab)x^2 - 2(a^2 - bc)x + (b^2 - ac) = 0$  在  $a \neq 0$  的情況下有實數且相等的根，則  $a^3 + b^3 + c^3$  的值为：

7.

Three circles have the centres at  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and each circle touches the other two externally. If  $AB = 5$  cm,  $BC = 7$  cm,  $CA = 6$  cm, find the radii of the three circles.

三個圓心分別位於  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，每個圓外切其他兩個圓。若  $AB = 5$  公分， $BC = 7$  公分， $CA = 6$  公分，求這三個圓的半徑。

三个圆心分别位于  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，每个圆外接其他两个圆。若  $AB = 5$  厘米， $BC = 7$  厘米， $CA = 6$  厘米，求这三个圆的半径。

.....

8.

In a cylindrical vessel of diameter 36 cm filled up with sufficient quantity of water, a solid spherical ball of radius 9 cm is completely immersed. What is the increase in height of water level?

在直徑 36 公分的圓柱形容器中裝足夠的水，將一個半徑 9 公分的實心球完全浸入其中。水位上升了多少？

在直径 36 厘米的圆柱形容器中装足够的水，将一个半径 9 厘米的实心球完全浸入其中。水位上升了多少？

.....

9.

A square hole of cross-sectional area  $4\text{ cm}^2$  is drilled across a cube with its length parallel to a side of the cube. If an edge of the cube measures 5 cm, what is the total surface area of the body so formed?

在一個邊長為 5 公分的立方體上，鑽了一個截面積為 4 平方公分的方形孔，孔的長度與立方體的一邊平行。求形成的物體的總表面積。

在一个边长为 5 厘米的立方体上，钻了一个截面积为 4 平方厘米的方形孔，孔的长度与立方体的一边平行。求形成的物体的总表面积。

10.

One side of an equilateral triangle is 24 cm. The mid-points of its sides are joined to form another triangle whose mid-points are in turn joined to form still another triangle. This process continues indefinitely. Find the sum of the perimeters of all the triangles.

一個邊長為 24 公分的等邊三角形，其邊的中點相連形成另一個三角形，再將該三角形的邊的中點連接形成另一個三角形，這個過程無限重複。求所有三角形的周長之和。

一个边长为 24 厘米的等边三角形，其边的中点相连形成另一个三角形，再将该三角形的边的中点连接形成另一个三角形，这个过程无限重复。求所有三角形的周长之和。

.....

11.

Find remainder when  $x^5 - 9x^2 + 12x - 14$  is divided by  $(x - 3)$ .

求  $x^5 - 9x^2 + 12x - 14$  被  $(x - 3)$  除時的餘數。

求  $x^5 - 9x^2 + 12x - 14$  被  $(x - 3)$  除时的余数。

.....

12.

The value of  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 2\pi$ ) satisfying  $\operatorname{cosec} \alpha + 2 = 0$  are

滿足  $\operatorname{cosec} \alpha + 2 = 0$  的  $\alpha$  值 ( $0 < \alpha < 2\pi$ ) 為

滿足  $\operatorname{cosec} \alpha + 2 = 0$  的  $\alpha$  值 ( $0 < \alpha < 2\pi$ ) 为

.....

13.

The area of an isosceles triangle is  $a$ , when the angle included between the two equal sides is  $60^\circ$ .

What will be the area if the angle included between the two equal sides becomes  $120^\circ$ ? (Keeping the length of equal sides same as before)

等腰三角形的面積為  $a$ ，當兩個相等的邊之間的夾角為  $60^\circ$  時。如果這個夾角變成  $120^\circ$ ，面積將會是多少？（等邊的長度和之前保持一樣）

等腰三角形的面积为  $a$ ，当两个相等的边之间的夹角为  $60^\circ$  时。如果这个夹角变成  $120^\circ$ ，面积将会是多少？（等边的长度和之前保持一样）

14.

In the  $\triangle ABC$ ,  $AB = 2$  cm,  $BC = 3$  cm and  $AC = 4$  cm.  $D$  is the middle-point of  $AC$ . If a square is constructed on the side  $BD$ , what is the area of the square?

在  $\triangle ABC$  中， $AB = 2$  cm， $BC = 3$  cm， $AC = 4$  cm。 $D$  是  $AC$  的中點。如果在  $BD$  邊上構造一個正方形，這個正方形的面積是多少？

在  $\triangle ABC$  中， $AB = 2$  cm， $BC = 3$  cm， $AC = 4$  cm。 $D$  是  $AC$  的中點。如果在  $BD$  边上构造一个正方形，这个正方形的面积是多少？

.....

15.

In  $\triangle ABC$ ,  $a = 2x$ ,  $b = 3x + 2$ ,  $c = \sqrt{12}$  and  $\angle C = 60^\circ$ . Find  $x$ .

在  $\triangle ABC$  中， $a = 2x$ ， $b = 3x + 2$ ， $c = \sqrt{12}$ ， $\angle C = 60^\circ$ 。求  $x$  的值。

在  $\triangle ABC$  中， $a = 2x$ ， $b = 3x + 2$ ， $c = \sqrt{12}$ ， $\angle C = 60^\circ$ 。求  $x$  的值。

.....

16.

Solve for  $x$  :  $\log_{10} [\log_2 (\log_3 9)] = x$ .

$\log_{10} [\log_2 (\log_3 9)] = x$ ，求  $x$  的值。

$\log_{10} [\log_2 (\log_3 9)] = x$ ，求  $x$  的值。

.....

17.

How many odd numbers less than 1000 can be formed using the digits 0, 2, 5, 7 repetition of digits are allowed?

使用數字 0, 2, 5, 7 並允許重複數字，可以組成多少個小於 1000 的奇數？

使用數字 0, 2, 5, 7 並允許重複數字，可以組成多少個小於 1000 的奇數？

18.

A boy from the top of a 100 metres high building sees car moving towards the building at an angle of depression of  $30^\circ$ . After sometime, the angle of depression becomes  $60^\circ$ . Calculate the distance (in metres) travelled by the car during this time.

一個男孩從一座 100 米高的大樓頂部以  $30^\circ$  的俯角看到一輛汽車向大樓移動。過了一會兒，俯角變成了  $60^\circ$ 。計算這段時間汽車行駛的距離（以米為單位）。

一个男孩从一座 100 米高的大楼顶部以  $30^\circ$  的俯角看到一辆汽车向大楼移动。过了一会，俯角变成了  $60^\circ$ 。计算这段时间汽车行驶的距离（以米为单位）。

.....

19.

Let  $ABCD$  be a quadrilateral in which  $AB$  is parallel to  $CD$  and perpendicular to  $AD$ ,  $AB = 3 CD$ , the area of quadrilateral is 4 sq. unit. If a circle can be drawn touching all the sides of the quadrilateral, then the radius of the circle is

設  $ABCD$  是一個四邊形，其中  $AB$  平行於  $CD$  且垂直於  $AD$ ， $AB = 3 CD$ ，四邊形的面積為 4 平方單位。如果可以畫一個圓，觸及四邊形的所有邊，則該圓的半徑是

设  $ABCD$  是一个四边形，其中  $AB$  平行于  $CD$  且垂直于  $AD$ ， $AB = 3 CD$ ，四边形的面积为 4 平方单位。如果可以画一个圆，触及四边形的所有边，则该圆的半径是

.....

20.

Two identical circles intersect so that their centres, and the points at which they intersect, form a square of side 1 cm. The area in sq cm of the portion that is common to the two circles is:

兩個相同的圓相交，它們的圓心和相交點形成邊長為 1 公分的正方形。兩個圓的共同部分的面積（以平方公分為單位）為：

两个相同的圆相交，它们的圆心和相交点形成边长为 1 公分的正方形。两个圆的共同部分的面积（以平方公分为单位）为：

.....

END OF PAPER