

| Grade 12 | Mathematics Olympiad |

Instructions:

考生須知:

考生須知:

- Question number 1 to 20 are of short answer type.

第1至20題均是短答題。

第1至20題均是短答題。

- Each question carries 10 marks.

每題佔10分。

每題占10分。

.....

1.

In a college of 500 students, every student reads 5 newspapers and every newspaper is read by 50 students. The number of newspapers is _____.

在一家有500名學生的大學，每位學生閱讀5張報紙，而每張報紙被50位學生閱讀。報紙的數量是_____。

在一家有500名学生的大学，每位学生阅读5张报纸，而每张报纸被50位学生阅读。报纸的数量是_____。

.....

2.

In tossing 10 coins, the probability of getting exactly 5 heads is k , find k .

拋起硬幣10次後，獲得剛好5個”公”的概率是 k 。請找出 k 。

拋起硬幣10次後，獲得剛好5個”公”的概率是 k 。請找出 k 。

.....

3.

Find the coefficient of x^5 in the expansion of $(1+x^2)^5(1+x)^4$.

找出 $(1+x^2)^5(1+x)^4$ 展開後 x^5 的系數。

找出 $(1+x^2)^5(1+x)^4$ 展開後 x^5 的系數。

.....

4.

If P denotes the power set of A and A is the void set, what is the number of elements in $P\{P\{P\{P(A)\}}\}$?

若 P 是 A 的冪集而 A 是空集，請問 $P\{P\{P\{P(A)\}}\}$ 元素的數量是多少？

若 P 是 A 的冪集而 A 是空集，請問 $P\{P\{P\{P(A)\}}\}$ 元素的數量是多少？

.....

5.

If z is a complex number such that $z+|z|=8+12i$, find the value of $|z^2|$.

若 z 是一複數，使得 $z+|z|=8+12i$ ，請找出 $|z^2|$ 的數值。

若 z 是一复数，使得 $z+|z|=8+12i$ ，请找出 $|z^2|$ 的数值。

.....

6.

The sum of $i-2-3i+4\ldots$ up to 100 terms, where $i=\sqrt{-1}$, is_____.

$i-2-3i+4\ldots$ 的首100項之和是_____，其中 $i=\sqrt{-1}$ 。

$i-2-3i+4\ldots$ 的首100项之和是_____，其中 $i=\sqrt{-1}$ 。

.....

7.

Find the number of integral values of k for which the equation

$7\cos x + 5\sin x = 2k+1$ has a solution.

找出正整數 k 的數量使得方程 $7\cos x + 5\sin x = 2k+1$ 有解。

找出正整数 k 的数量使得方程 $7\cos x + 5\sin x = 2k+1$ 有解。

.....

8.

If $(-4, 5)$ is one vertex and $7x - y + 8 = 0$ is one diagonal of a square, then find the equation of the second diagonal.

若 $(-4, 5)$ 是正方形的一頂點，而該正方形的其中一條對角線的方程是 $7x - y + 8 = 0$ 。請找出該正方形另一條對角線的方程。

若 $(-4, 5)$ 是正方形的一顶点，而该正方形的其中一条对角线的方程是 $7x - y + 8 = 0$ 。请找出该正方形另一条对角线的方程。

.....

9.

Let A be the centre of the circle $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$, and B(1,7) and D(4,-2) are points on the circle, if tangents are drawn at B and D, which meet at C, then find the area of quadrilateral ABCD.

設A為圓 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ 的圓心，B(1,7)和D(4,-2)是圓上的點。若從B和D所畫的切線於C點相交，請找出四邊形ABCD的面積。

设A为圓 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ 的圓心，B(1,7)和D(4,-2)是圓上的点。若从B和D所画的切线于C点相交，请找出四边形ABCD的面积。

.....

10.

There are three men and seven women taking a dance class. Find the number of different ways in which each man is paired with a woman partner, and the four remaining women are paired into two pairs each of two.

三名男士和七名女士參與了一跳舞班。請找出把每名男士和一名女士組成搭檔，以及把剩下四名女士兩兩形成搭檔的方法的總數。

三名男士和七名女士参与了一跳舞班。请找出把每名男士和一名女士组成搭檔，以及把剩下四名女士两两形成搭檔的方法的总数。

.....

11.

Let $P(x)=a_0+a_1x^2+a_2x^4+.....+a_nx^{2n}$ be a polynomial in a real variable x with $0<a_0<a_1<a_2<....<a_n$. The function $P(x)$ has:

假設 $P(x)=a_0+a_1x^2+a_2x^4+.....+a_nx^{2n}$ 是一以 x 為實變量的多項式，其中 $0<a_0<a_1<a_2<....<a_n$ ，那麼函數 $P(x)$:

假设 $P(x)=a_0+a_1x^2+a_2x^4+.....+a_nx^{2n}$ 是一以 x 为实变量的多项式，其中 $0<a_0<a_1<a_2<....<a_n$ ，那么函数 $P(x)$:

(A) Neither a maximum nor a minimum

沒有極大值和極少值

没有极大值和极少值

(B) Only one maximum

只有一個極大值

只有一个极大值

(C) Only one minimum

只有一個極小值

只有一个极小值

(D) Only one maximum and only one minimum

只有一個極大值和一個極小值

只有一个极大值和一个极小值

.....

12.

If an angle B is a complement of an angle A, what are the greatest and least values of $\cos A \cos B$ respectively?

若A和B為互餘角，那麼 $\cos A \cos B$ 的最大值和最小值分別是多少？

若A和B为互余角，那么 $\cos A \cos B$ 的最大值和最小值分別是多少？

.....

13.

Nancy obtained 70 and 75 marks in the first two tests. Find the minimum marks she should get in the third test to have an average of at least 60 marks.

詠彤在首兩次測驗分別獲得70和75分。請找出她需要在第三次測驗獲得的最低分數，使得其平均分最少有60分。

詠彤在首两次测验分别获得70和75分。请找出她需要在第三次测验获得的最低分数，使得其平均分最少有60分。

.....

14.

A fair die is tossed 180 times, the standard deviation of the number of sixes equal to _____.

一粒公平的骰子被擲180次，擲得6的標準差是_____。

一粒公平的骰子被掷180次，掷得6的标准差是_____。

.....

15.

Find the remainder when $\forall n, 3^{2n}$ is divided by 8.

請找出 $\forall n, 3^{2n}$ 除以8的餘數。

请找出 $\forall n, 3^{2n}$ 除以8的余数。

.....

16.

The minimum value of $y=xe^x$ is _____.

$y=xe^x$ 的極小值是 _____。

$y=xe^x$ 的极小值是 _____。

.....

17.

Two dice are thrown at the same time for n times. Find the probability of obtaining a double six at least once.

兩顆骰子同時被投擲 n 次。請找出最少一次兩顆骰子均擲到6的概率。

两颗骰子同时被投掷 n 次。请找出最少一次两颗骰子均掷到6的概率。

.....

18.

If $w = \frac{z}{z - \frac{1}{3}i}$ and $|w| = 1$, then z lies on

如果 $w = \frac{z}{z - \frac{1}{3}i}$ 且 $|w| = 1$ ，則 z 位于

如果 $w = \frac{z}{z - \frac{1}{3}i}$ 且 $|w| = 1$ ，則 z 位於

(A) an ellipse

— 橢圓形上

— 橢圓形上

(B) a circle

— 圓形上

— 圓形上

(C) a parabola

— 拋物線上

— 拋物線上

(D) a straight line

— 直線上

— 直線上

.....

19.

Given the relation $R=\{(1,2),(2,3)\}$ on the set $A=\{1,2,3\}$, find the minimum number of ordered pairs which when added to R make it an equivalence relation.

已知在集合 $A=\{1,2,3\}$ 中， $R=\{(1,2),(2,3)\}$ 。請找出有序數對的數量的最小值，使得當這些數對加入 R 時，等價關係出現。

已知在集合 $A=\{1,2,3\}$ 中， $R=\{(1,2),(2,3)\}$ 。請找出有序数对的数量最小值，使得当这些数对加入 R 时，等价关系出现。

.....

20.

If p : It is snowing, q : I am cold, then the compound statement 'it is snowing and it is not that I am cold' is given by

若 p : 下雪中, q : 我感到冷, 那麼複合陳述「下雪中而我不感到冷」的表達式是：

若 p : 下雪中, q : 我感到冷, 那么复合陈述「下雪中而我不感到冷」的表达式是：

(A) $p \wedge (\sim q)$

(B) $p \wedge q$

(C) $(\sim p) \wedge q$

(D) $(\sim p) \wedge (\sim q)$

.....

END OF PAPER